הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

הפקולטה להנדסת תעשיה וניהול ע״ש ויליאם משה דוידסון

Technion - Israel Institute of Technology

The William Davidson Faculty of Industrial Engineering and Management

---

תאריך הבחינה: 1.02.2022

סגל הקורס: ד״ר אלה לוין, ד״ר נעמי סלם-בלוקה, אביעד רוטבוים, ד״ר נדיה בורדו

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה – 094481

מבחן מועד א׳ - סמסטר חורף תשפ״ב

טור 1

משך הבחינה: שלוש שעות.

חומר עזר מותר: שני דפי עזר A4 כתובים משני הצדדים, מחשבון כיס פשוט.

בנוסף מצורפים דפי התפלגויות מיוחדות, טבלאות התפלגויות דגימה וטבלת בדיקת השערות.

למבחן שני חלקים. **יש לענות על כל השאלות** בכל אחד מחלקי הבחינה:

א. החלק הראשון מכיל שאלות רב-ברירה (סגורות). **על חלק זה יש לענות רק בדף המיועד לכך המצורף למבחן**. אין לסמן יותר מתשובה אחת לכל שאלה. הציון יינתן על סמך הסימונים בדף התשובות בלבד!

ב. החלק השני מכיל שתי שאלות פתוחות, עליהן יש לענות **במחברת המצורפת ולא על גבי שאלון זה**. בחלק זה עליכם לפרט ולהסביר את כל השלבים שביצעתם בדרך לפתרון. את הפתרון יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד. ניתן להשתמש בטיוטה שלא תיבדק.

בסוף המבחן יש להחזיר את שאלון הבחינה, את דף התשובות ואת מחברת הפתרון.

ב ה צ ל ח ה !

חלק ראשון – יש לענות על כל השאלות בחלק זה. משקל כל שאלה: 7 נק'

שאלה 1

(שאלה זו היא גם שאלת בוחן)

הוחלט לערוך בדיקות רדיואקטיביות באזורים שונים בארץ. ידוע שההסתברות לרדיואקטיביות יתר בכל אזור היא 0.02.

בשל הפרעות מסוימות בפעולת מכשיר למדידת הקרינה ישנה הסתברות של 0.95 לתוצאה חיובית כאשר קיימת קרינת יתר, והסתברות של 0.01 לתוצאה חיובית כאשר לא קיימת קרינת יתר.

תוצאה חיובית=המכשיר מראה קרינת יתר.

להלן שתי טענות:

טענה I: ההסתברות שהמכשיר יראה שלא קיימת קרינת יתר שווה 0.9712.

טענה II: אם ידוע שמכשיר הראה על קרינת יתר באזור מסוים, ההסתברות שאכן קיימת קרינה יתר באותו אזור שווה 0.6597.

בחרו את התשובה הנכונה:

א. שתי הטענות נכונות
ב. שתי הטענות שגויות
ג. רק טענה I נכונה
ד. רק טענה II נכונה

שאלה 2

(שאלה זו היא גם שאלת בוחן)

ציון **סופי** בקורס מחושב כממוצע רגיל בין ציון הבוחן - X, לבין ציון המבחן -Y.

ממוצע ציון הבוחן הוא 80 עם סטיית תקן של 11,

ממוצע ציון **סופי** בקורס הוא 75 עם סטיית תקן של 10.

כמו כן ידוע שהשונות המשותפת בין ציון הבוחן – X לבין ציון המבחן - Y שווה ל-50.

שונות ציון המבחן (Y) היא:

א. 10.5
ב. 100
ג. 179
ד. 229

שאלה 3

(שאלה זו היא גם שאלת בוחן)

מטילים קובייה הוגנת עד שהמספר 6 מופיע. ההסתברות לכך שיהיה צורך להטיל אותה יותר מ-5 פעמים נמצאת באינטרוול:

א. $[0, 0.25]$

ב. $(0.25, 0.5]$

ג. $(0.5, 0.75]$

ד. $(0.75, 1]$

שאלה 4

ידוע כי 70% מרופאי הילדים ממליצים על סירופ מסוים נגד שיעול. קבוצת אימהות טוענת כי לאחר פרסום מחקר חדש פרופורציית רופאי הילדים הממליצים על סירופ זה ירדה.

נלקח מדגם מקרי של 400 רופאי ילדים. נמצא כי 260 רופאי הילדים מתוך המדגם המליצו על הסירופ.

טענה I: פרופורציית רופאי הילדים הממליצים על הסירופ (p) מתפלגת בקירוב נורמלית.

טענה II: ברמת מובהקות 3% נסיק כי האימהות צודקות.

בחרו את התשובה הנכונה:

א. שתי הטענות נכונות

ב. שתי הטענות שגויות

ג. רק טענה I נכונה

ד. רק טענה II נכונה

שאלה 5

במבחן סטטיסטי ברמת מובהקות $\alpha=0.05$ התקבל p-value=0.08. אם באותו המבחן ישתמשו ברמת מובהקות $\alpha=0.10$ במקום ברמת מובהקות $\alpha=0.05$:

א. יתקבל p-value גבוה יותר

ב. יתקבל p-value נמוך יותר

ג. יתקבל p-value זהה

ד. דרוש יותר מידע על המבחן הסטטיסטי כדי לדעת מה יקרה ל-p-value

שאלה 6

מספר השגיאות במאה שורות קוד שעושה מתכנת מסוים נבדק על 30000 שורות קוד אקראיות (כלומר, נלקח מדגם בגודל 300). להלן התוצאות:

מספר שגיאות למאה שורות קוד	שכיחות
0	194
1	74
2	25
+3	7

נסמן ב-X את מספר השגיאות במאה שורות קוד של המתכנת. מעוניינים לבדוק את ההשערה כי $X \sim Pois(0.46)$.

נסמן: M – ערך סטטיסטי המבחן, $\chi^2_{(df),p}$ - השברון ה-p של משתנה מקרי המתפלג חי-בריבוע עם df דרגות חופש.

איזה מבין הטענות הבאות **נכונה:**

א. נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות 5% ולא נדחה ברמת מובהקות 10%.

ב. תחת השערת האפס, סטטיסטי המבחן מפולג בקירוב לפי התפלגות חי-בריבוע עם 2 דרגות חופש.

ג. נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות α אם ורק אם $M > \chi^2_{(df),1-\frac{\alpha}{2}}$ או $M < \chi^2_{(df),\frac{\alpha}{2}}$.

ד. $P-value = 2P_{H_0}\left(\chi^2_{(df)} > M\right)$.

שאלה 7

במפעל מסוים רצו לבדוק את הקשר בין רמת ההשכלה של עובדים (X) לבין השכר שלהם (Y). רמת ההשכלה נמדדת במספר שנות לימוד והשכר נמדד באלפי שקלים. לצורך כך נאספו נתונים על 20 עובדים והתקבלו הנתונים הבאים:

$$\bar{X} = 14 \quad S_X = 2$$
$$\bar{Y} = 15 \quad S_Y = 4$$
$$\sum_{i=1}^{20}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) = 121.6$$

כאשר $\bar{X}, \bar{Y}, S_X, S_Y$ הינם ממוצעי המדגמים וסטיות התקן המדגמיות.

הניחו שהנתונים מהווים מדגם מקרי מהמודל הלינארי הפשוט:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

איזו טענה מבין הטענות הבאות **<u>אינה</u>** נכונה?

א. אחוז השונות של Y המוסברת על-ידי X הינו 64%.

ב. בבדיקת ההשערות על מובהקות הרגרסיה לא נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות 0.05.

ג. חלק מהשונות של Y שאינו מוסבר ע"י מודל הרגרסיה הוא 109.44.

ד. $6 < \hat{\sigma}^2 < 7$

חלק שני - שאלות פתוחות. יש לענות על שתי השאלות בחלק זה.

שאלה 8 (25 נקודות)
(שאלה זו היא גם שאלת בוחן)

ברפת קיבוץ נווה יובלים יש 150 פרות. ידוע כי תנובת החלב השבועית של כל פרה היא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת של 300 ליטר וסטיית תקן של 100 ליטר. כל פרה מניבה חלב באופן בלתי תלוי בפרות האחרות.

א. מהי ההסתברות שבשבוע מסוים סך תנובת החלב ברפת יהיה בין 44,000 ל-46,500 ליטר? כיצד מתפלג סך תנובת החלב ברפת (מהו סוג ההתפלגות והפרמטרים שלה).

ב. עבור תנובת חלב שבועית של 44,000-46,500 ליטר הקיבוץ יקבל מענק של 5,000 ₪ ממועצת החלב. עבור תנובת חלב שבועית גדולה מ-46,500 ליטר הקיבוץ יקבל מענק של 10,000 ₪. עבור תנובת חלב שבועית נמוכה מ-44,000 הקיבוץ לא יזכה למענק. רשמו את פונקציית ההסתברות ואת פונקציית ההתפלגות המצטברת של גובה המענק שהקיבוץ יכול לקבל בשבוע מסוים. מהי תוחלת המענק השבועי?

ג. החלב מהפרות מועבר למיכלית מקוררת אותה מרוקנים אחת לשבוע עם מכירת החלב למחלבה המקומית. מה צריכה להיות קיבולת המיכלית המינימלית (בליטרים) כך שההסתברות שהיא תתמלא לחלוטין בשבוע מסוים תהיה לכל היותר 0.05?

ד. ענו על סעיף א' תחת ההנחה כי תנובת חלב שבועית של פרה היא משתנה מקרי אחיד רציף עם אותה תוחלת וסטיית תקן. השוו בין התשובה בסעיף א' לבין התשובה בסעיף זה.

שאלה 9 (26 נקודות)

נבדק המרחק שעובר כדור גולף שנזרק ע"י Iron Byron , מכונת גולף מכנית, המדמה את התנועות של האלוף האגדי, Byron Nelson. לשם כך נבחרו בצורה אקראית עשרה כדורי גולף משני מותגים שונים (סה"כ 20 כדורים) ונמדד המרחק שכל אחד מהכדורים עבר. להלן הנתונים במטרים:

מותג א': X	267	263	275	279	271	283	271	287	286	275
מותג ב': Y	268	263	270	271	281	273	265	260	244	258

מנתונים אלה התקבל כי המרחק הממוצע של הכדורים ממותג א' היה 275.7 עם סטיית תקן 8.03 והמרחק הממוצע של הכדורים ממותג ב' היה 265.3 עם סטיית תקן 10.04. נניח ש-X ו-Y מתפלגים נורמלית.

מעוניינים לבדוק ברמת מובהקות 5% כי תוחלות המרחקים שעוברים הכדורים משני המותגים שונות.

א. נסחו את ההשערות.

ב. ציינו את ההנחות הדרושות לבדיקת ההשערות.

ג. מהו הפרמטר הנבדק? מה האומד הנקודתי - ציינו את ההתפלגות שלו והפרמטרים של ההתפלגות. חשבו את האומדן.

ד. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות 5% בשלוש דרכים:

1. בעזרת סטטיסטי המבחן (ציינו את התפלגות הסטטיסטי) והערך הקריטי;
2. בעזרת חישוב ה- P-Value;
3. בעזרת בניית רווח סמך.

מה מסקנתכם?